

A HUN-REN RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET KUTATÁSI EREDMÉNYEI 2024-BEN

Algebrai kutatások

Bevezettek egy új, triangulánsnak nevezett lineáris algebrai fogalmat. Ez egy szám, amelyet két mátrixhoz rendelünk hozzá a mátrixelemek polinomjaként, és pontosan akkor nulla, ha a két mátrixnak van egy-egy, egymásra merőleges bal-, illetve jobboldali sajátvektora. A trianguláns segítségével egy új extrémális jellemzését adták az ún. kölcsönösen torzítatlan bázisoknak, amelyek fontos szerepet játszanak a kvantum-információelméletben. A trianguláns általánosításaként bevezettek magasabbrendű triangulánsokat is. Két n -szer n -es mátrix k -adik triangulánsa pontosan akkor nulla, ha a két mátrixnak van egy-egy, k , ill. $n-k$ dimenziós invariáns altere, amelyek nem csak a nullvektorban metszik egymást.

Belátták a maximális entrópiájú véletlen séta létezését nem amenábilis csoport feletti iid súlyokra nézve az alacsony hőmérsékletű fázisban. Vizsgálták negatív görbületű kompakt felszíneken vett diffúziós folyamat maximális sebességét az univerzális fedőtéren. Vizsgálták hardcore, pozitív sűrűségű ergodikus egyenes folyamatokban a bundling jelenséget, ennek egy diszkrét rácson vett analógiájára effektív entrópia becslést adtak. Tovább vizsgálták unimoduláris véletlen fák növekedésének létezését és a folyam-invariáns mértékekre az Anderson-lokalizáció jelenségét. A Poisson-határ problémával kapcsolatban a Lubetzky–Sly-tételt felhasználva kimutatták, hogy egy véletlen reguláris gráfon a diffúzió-súlyozott mintavétel határértéke vagy a reguláris fa határa, vagy egy pontba sűrűsödik össze; azaz nincs köztes fázisátmenet.

Véges Abel-csoport irányított Cayley-átmérőjét kifejezték a csoport ciklikus direkt összeadandóinak méreteivel. Olyan algoritmusokat fejlesztettek ki, amelyek alsó, illetve felső becslést adnak egy tetszőleges nemkommutatív véges csoport Cayley-átmérőjére. Az algoritmust implementálták a GAP számítógépes algebra csomagba.

Mesterséges intelligencia kutatások

A mesterséges intelligencia elméleti alapjainak kutatásához kapcsolódóan egy optimális transzport alapú generatív modellt definiáltak a Wasserstein Autoencoder modellek családjából. Ebben a megközelítésben a rejtett pontok pozícióinak optimalizálása a teljes tréningadathalmazon történik. Több metrikát implementáltak ezen modellek kiértékelésére, megmutatták bizonyos prior eloszlások esetén, hogy a globális optimális transzport javítja a generatív modellek teljesítményét a minibatch-alapú modellekhez képest.

Az NTK-mátrix elemei egyre pontosabban közelíthetők a megfelelő aktivációk közötti inverz koszinuszos távolságokkal, ahogy nő a hálózat mélysége. Ez a megfigyelés lehetővé teszi a spektrális tulajdonságok pontosabb becslését is. Eredményeik szerint az aktivációs függvény paraméterei alapvetően meghatározzák, milyen gyorsan stabilizálódik az NTK-mátrix kondíciószáma a mélység növelésével. Az abszolút értéken alapuló aktivációs függvény ebből a szempontból előnyösebb, mint például a ReLU.

Frissítették és optimalizálták a TrOCR optikai karakterfelismerő modellt az Állambiztonsági Szolgálatok Történeti Levéltárában. A Magyar Nemzeti Levéltár adathalmazán újratanították a TrOCR modellt. Továbbfejlesztették a Retrieval-Augmented Generation keretrendszer két irányban is: a standard vektoralapú keresési megoldások mentén, másrészt a gráfolapú reprezentáción alapuló ún. GraphRAG megközelítésben. Emellett az érzékeny információk automatikus kiszűrésére szolgáló megoldásukon dolgoztak, amely a nagy nyelvi modellek in-context learning képességeit használja.

Egy Helly-típusú problémát próbáltak gépi keresési módszerekkel megoldani. A számítógépes analízis kapcsolatot tárt fel a kvadratikus programozással, amely végül számítógépes módszereket nem használó, „papír és ceruza” bizonyítás megtalálásához vezetett.

Belátták, hogy ha egy Hadamard-mátrix normalizált alakja tartalmaz három darab -1 -es elemet, akkor a mátrix két, konkrét Hadamard-mátrix család egyikéhez tartozik.

Algoritmusokat adtak a kvadratikus Fourier-analízis felbontási tételeire: Abel-csoportokon értelmezett függvények strukturált és kvázirandom részekre való szétbontására, illetve a kvadratikus harmonikus komponensek megadására.

Bevezették és kidolgozták a csoportok fogalmának egy magasabbrendű általánosítását, amely magában foglalja az úgynevezett nilspace-ek elméletét. Ezekkel az új struktúrákkal talán leírhatóvá válik a Gowers-normák viselkedése nemkommutatív csoportokon is.

Kutatások a valószínűesszámitás témakörében

Több dinamikus véletlen gráf modellt vizsgáltak. A foksám-korlátos hálózat-modellben megértették, hogy a foksámkorlát hogyan késlelteti az óriás fürt megjelenését. Két magasan jegyzett fizikus cikk is született: az egyik kvantum kommunikációs hálózatok működését, a másik fizikai hálózatok (pl. agy, érrendszer, folyóhálózatok) keletkezését modellezve.

Bevezettek egy új véletlen fa modellt véletlen közegben, egy gráf Egyenletes és Minimális Feszítőfái között interpolálva. Meghatározták a teljes gráfon az átmérő fázisátmeneteit.

A statisztikus fizika és az információelmélet határán vizsgálták azt a kérdést, megtippelhetjük-e a függvény értékét, ha ismerjük az input spinek egy kis véletlen részhalmazát. A magnetizáció Ising-modelljére megállapították, hogy a kritikus hőmérsékleten megtippelhető a teljes magnetizáció, ám magasabb hőmérsékleten már semmilyen függvény sem.

Valószínűségi tereken való végtelen csoporthatások és a Borel-ekvivalencia relációk elméletének egyik fő nyitott kérdése, hogy a Borel-amenabilitásból következik-e a hipervégesség. E sejtésnek két relaxációját sikerült igazolni.

Járványterjedési Markov-láncok egy nagy osztályában a járványgörbe determinisztikus NIMFA közelítésének a pontosságát határozták meg.

Invariancia-elvet (Brown-mozgáshoz tartást) bizonyítottak két- és háromdimenziós Lorentz-gázra, fizikailag releváns esetekben.

Funkcionális centrális határeloszlás-tételt mutattak meg távközlési (sorbanállási) rendszerekre abban az esetben, amikor a kiszolgálási idők nem függetlenek, hanem csak stacionáriusak. A korábbi ismert konvergenciasebességet az invariáns eloszláshoz is megjavították.

Kifejlesztettek egy módszert konfidenciahatárok megadására véletlen közegbeli Markov-láncokra mely akkor is működik, ha a környezet nem stacionárius (de eleget tesz bizonyos regularitási feltételeknek). Ezeket az eredményeket a szóban forgó folyamatok erős keverési együtthatóinak becslésével érték el.

Megmutatták, milyen mértékben gyorsítható a körön aszimmetrikus bolyongás keverési sebessége véletlen élek hozzáadásával.

Kifejlesztettek egy módszert, mellyel teljes variációnormabeli konvergencia mutatható meg gyengébb konvergenciafajtákból (Fortet-Mourier, Wasserstein), momentum- és simasági kiegészítő feltételek mellett. Összehasonlították a különféle konvergenciasebességeket is. Memóriával bíró sztochasztikus dinamikai rendszerekre, ill. a Malliavin-kalkulusban alkalmazták eredményeiket.

Analitikus kutatások

Az Analízis osztály kutatói 2024-ben az előzetes terveknek megfelelő területeken érték el eredményeket.

Fourier-analízisben, a Fuglede-problémakörben sikerült olyan gyengén parkettázó halmazt találni, amely nem parkettáz, és nem is spektrális. Valamint ciklikus csoportokban a Delsarte-féle LP- dualitási módszert alkalmazva sikerült olyan funkcionális parkettázásokat találni, amelyek nem teljesítik a Coven–Meyerowitz-féle T2 feltételt. A Delsarte-féle extrémális problémákról igazolták, hogy az extrémális feladat megfelelő módosítása mellett mindig létezik extrémális függvény is.

Kvantum-információelméletben a MUB-hármasok egy karakterizációját adták meg Hadamard-kockák segítségével.

A kvantum optimális transzport témakörben részben bizonyították, részben numerikus evidenciával megtámogatták azt a sejtést, amely a kvantum csatornákkal definiált optimális transzport távolságok egy osztályának metrikus tulajdonságaira vonatkozik. Kidolgozták egy általános, nem-kvadratikus változatát a kvantum csatornákon alapuló optimális transzport feladatnak, és ezt az általános sémát használva kvantum p -Wasserstein-távolságokat és divergenciák alapvető tulajdonságait vizsgálták. Meghatározták a maximum normával ellátott valós síkra, illetve az egységnégyzetre épülő p -Wasserstein-terek izometriáit valamennyi pozitív p paraméter-értékre.

Approximációelméletben bevezettek egy új általános „gyengén analitikusan összefüggő” tulajdonságot, amely biztosítja a Bernstein–Markov-tulajdonság teljesülését tetszőleges majdnem mindenütt pozitív súlyra. Sikeresen alkalmazták ezt a módszert a többváltozós polinomok deriváltjainak subexponenciális növekedésének igazolására is.

Matematikai fizikai kutatásokban lineáris operátorok spektrumát közelítették: önadjungált, nyom- osztályú operátorokra tudtak Hausdorff-metrikában konvergálni a spektrumhoz, és az ehhez szükséges momentumokat a gyakorlatban számolni fizikailag releváns operátorok széles skálájára.

Az analízis számelméletbeli alkalmazásával újabb sűrűségi tételeket vezettek le a Beurling-féle zéta függvény gyökeire vonatkozóan.

Számelméleti kutatások

A Dirichlet L -függvények és a Riemann-zetafüggvény elméletében fontos szerepet játszanak az ún. sűrűségi tételek. Az egyik leghíresebb probléma, az ún. sűrűségi hipotézis megfogalmazható általánosabb függvényekre is, mint pl. a Dedekind-, a Beurling-féle zetafüggvény vagy a Selberg-osztályba eső függvények. Dedekind zeta függvényekre vonatkozó sűrűségi tételeket javítottak. Általános sűrűségi tételt bizonyítottak a Selberg-függvényosztályra. Igazolták a sűrűségi hipotézist azon sávban, ahol a változó valós része legalább 0,9, amennyiben a függvény rendje nem nagyobb 2-nél. Sűrűségi tételt bizonyítottak Beurling-zetafüggvényekre klasszikus zéró-detektálási összegek és Halász módszerének felhasználásával.

Az $SU(n, n-1)$ csoporton definiált Hecke–Maass-csúcsformákra vonatkozó szup-norma problémát vizsgálták. Az ehhez tartozó mátrix-leszámolási problémáról az $n=2$ esetben már korábban látták, hogy nem megoldható. Az $n=3$ esetben sikerült a megoldásokat algebrai számelméleti módszerekkel pontosan leírni, és ennek következtében az $n=2$ esethez hasonló, negatív választ adni az eredeti kérdésre. Sikerült megválaszolni, hogy mikor egészíthető ki egy 6-dimenziós egész vektor maximális rangú icube-bá.

Legyen G a moduláris csoport. Ha z és w két adott pont a felső félsíkon és R egy végtelenhez tartó valós szám, a hiperbolikus körprobléma a w körüli R sugarú nemeuklideszi körbe eső, z -vel G szerint ekvivalens pontok számának az aszimptotikus meghatározására vonatkozik. A legjobb ismert pontonkénti becslés hibatagja $\exp(2R/3)$. Sikerült belátniuk, hogy a hibatag

lokális négyzetintegrálját véve javítható a becslés. A lokális négyzetintegrálra kapott felső becslés $\exp(cR)$, ahol c bármely olyan konstans, amire $c > 9/14$ igaz.

Egy diszkrét pontthalmaz majdnem fedése alatt hipersíkoknak egy olyan rendszerét értjük, amely egy kivételével az összes pontot lefedi. Alon és Füredi klasszikus tétele szerint a d -dimenziós hiperkocka csúcsainak minden majdnem fedése legalább d darab hipersíkból áll. A kombinatorikus számelméletből ismert polinom módszer segítségével sikerült igazolniuk ennek a tételnek egy általánosítását.

Extremális kombinatorikai struktúrák kutatása

Két véges térbeli halmazrendszer metsző, ha minden kék metsz minden pirosat. Megmutatták, hogy ha az összes kék párhuzamos síkokban van, és az összes piros is párhuzamos síkokban van, akkor van olyan egyenes, ami vagy az összes kéket, vagy az összes pirosat metszi.

Az általánosított Turán-problémák kapcsolatát vizsgálták a fokszám alapú topológiai indexekkel. A topológiai indexeket a kémiai gráfelméletben használják molekulák bizonyos kémiai tulajdonságainak becslésére. Az általánosított Turán-számok vizsgálatában használt eszközöket topológiai indexek vizsgálatában is használták.

Az Erdős–Stone–Simonovits-tétel absztrakt általánosításait adták meg. Emellett Erdős–Ko–Radó nagyságrendű hipergráf Turán-, irányított gráfokban színezett Turán-problémákat, illetve kizárt halmazrendszeres problémákat is vizsgáltak. Egy Erdős–Ko–Rado típusú tételt bizonyítottak teljes párosítások részgráfjaira. $(0,1)$ -konfigurációkra vonatkozó stabilitási eredményeket vizsgáltak.

Egy n -változós monoton Boole-függvénynek k oka van, hogy értéke 1 legyen, ha a minimális diszjunktív normál formájában k tag van. Megadták a függvényt meghatározó elemi tesztek minimális számát az adaptív, és a nem-adaptív esetre.

Belátták, hogy az n -elemű alaphalmaz lexikografikusan utolsó m darab k -elemű részhalmaza maximalizálja a metsző párok volumenét, a metsző párt a metszet nagyságával számolva.

Befejezték a részbenrendezések monoton osztályainak könnyű tesztelésére vonatkozó munkát. Befejezték a mérhető párosítás nélküli treeingekről szóló, több kérdést és sejtést megválaszoló cikket és beküldték az Inventiones-be. Konstruktív módszerük alkalmazható az áramok terének kontrollálására is alkalmas graphingokban. Ezt fejlesztették tovább tetszőleges n természetes számra olyan graphingot konstruálva, melyben n -dimenziós az áramok tere. Hipervéges graphingokban mérhető Hall-tételt adó ötven oldalas cikküket a Duke-hoz nyújtották be, pozitív bírálatokat kaptak rá.

Folytatták az NP részosztályainak gráfhomomorfizmusok és színezések segítségével való elkódolására vonatkozó munkájukat.

Extremális és algoritmikus szempontból elemezték relációs adatbázisok erősen lehetséges integritási feltételeit, valamint számossági feltételeihez konstruálható minimális adat táblák méretét és szerkezetét vizsgálták, ami érdekes gráfelméleti kérdéshez vezetett.

Gráfelméleti problémák

Ellenpéldát találtak a 25 éves Merino–Welsh-sejtés matroidos változatára. A sejtés a Tutte-polinom bizonyos helyettesítési értékeire mond ki egyenlőtlenséget. Két formája ismert, egy gráfokra és egy matroidokra vonatkozó. Az utóbbi általánosabb, erről mutatták meg, hogy nem igaz.

Egy speciális metrikus tér pontjain definiált gráf ahhoz szükséges minimális élszámát vizsgálták, hogy a gráf tetszőleges két csúcsa között a gráfban mért távolság legfeljebb kétszerese, vagy éppen csak több, mint kétszerese legyen a megfelelő pontok adott metrikus térbeli távolságának. Megmutatták, hogy az első esetben a pontok számának függvényében lineárisnál jobban nő a szükséges élszám, míg a második esetben sikerült lineáris felső korlátot adniuk.

A maximális fokszámtól függő felső korlátokat adtak azon minimális színek számára, ahány színre szükség van ahhoz, hogy egy síkgráf, egy páros síkgráf, vagy egy ún. outerplanar gráf éleit úgy tudjuk kiszínezni, hogy annak minden négy hosszú köre tarka legyen, azaz élei négy különböző színnel legyenek színezve.

Igazolták Hakimi és Schmeichel sejtését az n csúcsú síkgráfokban előforduló öt hosszú körök lehetséges maximális számáról. Pontosan le is írták az összes olyan gráfot, aminél megvalósul ez a maximum.

Optimális változatát adták az ún. Kvantitatív Tört Helly-tételnek, ami azt mondja ki, hogy ha a d -dimenziós euklideszi tér n konvex halmazából összeállítható $(d+1)$ elemű családok egy adott hányadának a metszete legalább egységnyi térfogatú, akkor az n halmaz valamilyen pozitív hányada metszetének a térfogata is elér egy csak a dimenziótól függő pozitív értéket.

Megmutatták, hogy akárcsak a tört kromatikus szám esetén, a komplementer Lovász theta számra is igaz, hogy annak egy tetszőleges gráfon felvett értéke meghatározza az adott gráfból a Mycielski-konstrukcióval előállítható új gráfon felvett értékét.

Megcáfolták a több, mint 20 éves Pach–Tardos-sejtést, amely az 1-esek számára adott korlátot olyan 0-1 mátrixokban, amik nem tartalmazzák egy erdőnek, mint páros gráfnak az incidencia mátrixát.

Kombinatorika és hálózatalmélet

Folytatták a DYNASNET pályázatban vállalt kutatásokat. Legfontosabb eredményük a monoton szubmodularis függvények konvergencia-fogalmának megalkotása és a limeszobjektum megkonstruálása volt. Az elmélet szépen illeszkedik a graphing-ok elméletéhez: lokális-globálisan konvergens gráfsorozatok körmatroidjai a limeszgrafing matroidjához tartanak. Vizsgálták továbbá matroidok szorzatának lehetséges változatait, és kiterjesztették a valószínűségszámításból jól ismert „coupling” fogalmát halmazfüggvényekre, így a rangfüggvényeken keresztül matroidokra is.

Fizikai hálózatokkal kapcsolatban az osztály kutatói megvizsgálták a térfogatkizárás hatását a lineáris fizikai hálózatok lokális összeállítására, ahol a csomópontok és linkek keménymagú merev objektumok. Bevezettek egy minimális 3D-s modellt, és kimutatták, hogy a linkek tapadásának kinetikája logaritmikus, szemben az alacsonyabb dimenziókban tapasztalható algebrai növekedéssel, és ezt a minőségileg eltérő viselkedést a probléma 3D-s jellegéből adódó spontán kimerítő erők késleltetésének tulajdonítják. Eredményeik viszonyítási alapot kínáltak a fizikai hálózatok lokális összerendeződésének tanulmányozásához, ami a nem egyensúlyi fészekszerű csomagolásokra is hatással van.

Járvány matematikai kutatások terén kutatóik elkészítették a végső változatát egy cikknek, mely a járványterjedés korábban általuk megfigyelt „switchover” jelenségének matematikai elemzésével foglalkozott. Továbbfejlesztették a metapopulációs járványterjedési modellezési keretrendszert, amely az EGLAB Nemzeti Laboratórium projekt egyik kiemelt eredménye. Ez a keretrendszer készen áll arra, hogy beépüljön a Respicast európai járványelőrejelző rendszerbe. Munkatársaik kifejlesztettek egy viselkedési járványmodellt, amelyben az emberek közötti interakciók adaptív módon változnak a járványhelyzettel és az egyéni tudatosság szintjével összhangban. Valamint kifejlesztettek egy módszert, amely a vírus genetikai szekvenciáinak mutációi alapján következtetni tud viselkedési eseményekre (például szuperterjesztési eseményekre). Végül kidolgoztak egy projektet a természetes és véletlenszerű immunizálási folyamatok hatásairól, valamint ezeknek a következő járványkitörések elleni nyájimmunitásra gyakorolt hatásáról.

Szaktanulmányi kutatások

A Szaktanulmányi osztály munkájának középpontjában a felfedezett matematikaoktatás. Az „Így tanítanánk mi” projekt gyakorló matematikatanárok bevonásával kutatja azt, hogy hogyan lehet a középiskolai matematika tananyagot hatékonyan tanítani.

Az osztály dolgozói óravázlatokat, illetve középiskolai diákoknak szóló felfedezett szemléletű tananyagokat dolgoztak ki. Azzal is foglalkoztak, hogyan lehet minél több tanárnak segíteni abban, hogy felfedezett módon oktasson. Ennek a kutatásnak az eredményeként jelent meg a Juhász P, Szász R, Szűcs G, Varga E. (2024): Professional Support in Teaching Mathematics through Guided Discovery: The Role of Agency on Multiple Levels. Education Sciences, 14(7), 769. című publikáció egy Q2-es besorolású folyóiratban.

Az osztály ezen kívül olyan óravázlatokat és segédanyagokat dolgoz ki tanárok számára, amelyek segítségével a tanmenettől elszakadva tudják bemutatni a matematika hasznosságát, a mindennapi életünket meghatározó szerepét és szépségét a diákjaik számára.

Egy 2023-ban elvégzett statisztika középiskolai oktatásával kapcsolatos kísérlet szakmai elemzése is megtörtént, az eredmények publikálása az Advancing statistical inference: a comprehensive exploration of curriculum development, teacher seminars, and teacher perceptions in Hungarian secondary schools című cikk által folyamatban van.

Hazánk matematikai tehetséggondozásának ismertetése a nemzetközi kutatóközösséggel is lényeges része az osztály munkájának. Az osztály két nemzetközi együttműködés részeként is végez kutatásokat. A Montpellier-i egyetemmel sok éve zajlik a kooperáció, a Freudenthal Intézetrel közös munka során pedig a realiztikus matematikatanítás a közös vizsgálat témája.

Az osztály részt vesz a magyar matematikatanárok közösségépítésében, a munkájuk megkönnyítésében és hatékonyabbá tételében, szakmai támogatásban. Az osztály dolgozói jelentős szerepet vállalnak a Rátz László Vándorgyűlés szakmai programjának összeállításában. A vándorgyűlés a magyar matematikatanárok legnagyobb összefüggése, amely évente kerül megrendezésre. Emellett az osztály megteremti a lehetőséget annak, hogy gyakorló tanárok részt vegyenek matematikadidaktikai kutatásokban, illetve workshopok segítségével ismerjék meg jobban a felfedezett matematikatanítást.

Kutatások az algebrai geometriában és a differenciáلتopológiában

A görbe szingularitások rácspontkohomológiáit tanulmányozták, új strukturális tulajdonságokat bizonyítva. Egy nagyon általános rácspontkohomológia definícióján és tulajdonságain dolgoztak. Görbe szingularitások felület szingularitásokba való beágyazhatóságának invariánsait keresték. Bizonyították, hogy ha egy szendvics szingularitás topologikus típusát rögzítjük, akkor az analitikus típusok simításaiból csak véges sok Milnor-fibrium jelenhet meg.

Irányított Grassmann-sokaságok egész együtthatós kohomológiájában 4-torzió elemek egy végtelen családját adták meg. 6-dimenziós komplex Hadamard-mátrixok egy családját karakterizálták. Azt a sejtést fogalmazták meg, amely szerint irányított Grassmann-sokaságok $OG_{k(n)}$ egész együtthatós kohomológiája $k=3,4$ -re nem tartalmaz 4-torzió elemet. Ezt bizonyították is $k=3$ -ra. Belátták, hogy egy sztratifikált tér Segre–Stiefel–Whitney-osztálya megfelelően transzverzális leképezéssel az őskép Segre–Stiefel–Whitney-osztályára húzódik vissza.

Bizonyos 4-dimenziós sokaságok exotikus differenciálható struktúráinak létezését tanulmányozták beágyazott csomók segítségével. Megválasztották Kronheimer egy kérdését megszerkesztve egy 2-komponensű csomót az S^4 -ben, amelyek nem választhatók szét egy S^3 -mal, de szétválaszthatók egy S^3 -mal azonos homológiájú 3-sokasággal. Bizonyították egy összefüggést egy bizonyos csomó szignatúrája és a kétszeres elágazó fedés d -invariánsa között.

Bemutatták, hogy a standard 4-dimenziós gömbben van olyan beágyazott felület, ami 5 valós projektív sík összefüggő összegével diffeomorf, de a beágyazása nem diffeotóp a sztenderd beágyazással. Folytatták továbbá a Z_2 fundamentális csoportú 4-sokaságok egzotikus struktúráinak vizsgálatát, és a nem-spin esetben egy majdnem teljes választ találtak. Az eredmény más fundamentális csoportokra is kiterjeszthető. Megkezdtek a génusz-függvény metszetekre való kiterjesztésének vizsgálatát.

Belátták a Liebeck, Nikolov és Shalev által megfogalmazott sejtést véges egyszerű csoportok struktúrájára bizonyos kulcs esetekben. Vizsgálták a komplex 2-dimenziós Hitchin-modulusterek Floer-elméletét, és a második kohomológiájukon indukált filtrálást. Azt vették észre, hogy a nem-redukált fibrum komponenseinek multiplicitása határozza meg a megfelelő osztály fokát.

Az osztály több mint 25 nemzetközi konferencián tartott előadást.

Konvex és kombinatorikus geometriai kutatások

Sikerült karakterizálniuk a síkban a rácssokszögeken értelmezett exponenciális kiértékeléseket mindkét alapvető esetben – akkor is, ha mérhető függvényeken, és akkor is, ha analitikus függvényeken értelmezett exponenciális kiértékeléseket tekintünk. Az analitikus függvényértékű kiértékelések esetén a tér struktúrája sok szempontból analóg a moduláris formák terével. A tenzorértékű $SU(m)$ ekvivariáns kiértékelésekkel kapcsolatban sikerült meghatározniuk az adott rangúak dimenzióit, és a kapcsolódó $U(m)$ hatás lehetséges súlyait is.

A 8- és a 24-dimenziós egységsgömbök pakolásainak optimális sűrűségének a moduláris formák elméletét használó meghatározásáért Maryna Viazovska Fields-érmét is kapott. A HUN-REN kutatói ennek az eredménynek a stabilitását tudták megmutatni analízisből és geometriából jövő módszerek alkalmazásával.

Sikerült minden dimenzióban nagyságrendileg maximális Betti-számú Čech-komplexusokat konstruálniuk. Fontos speciális esetként megadtak n egységsgömböt a 3-dimenziós térben, amelyek körülbelül n^3 „lyukat” vesznek körül.

Sikerült megjavítaniuk az eddig ismert legjobb becsléseket azon gráfok számára, melyek megkaphatók n páronként max egy közös pontú x -monoton görbe metszetgrájként. A felső becslés bizonyítása a Geometria osztály munkatársainak egy 20 éves eredményén alapul.

Egy számhalmaz bi-Sidon, ha a páronkénti összegek mind különbözőek, és a páronkénti szorzatok is. Belátták, hogy minden n -elemű számhalmaz tartalmaz egy $n^{1/3}$ -nál sokkal nagyobb bi-Sidon részhalmazt, megjavítva a legjobb ismert korlátot.

Egy n -elemű síkbeli pontthalmaz sűrű, ha a pontok közti maximális és minimális távolságok aránya gyök n nagyságrendű. Sikerült igazolniuk Bose, Hurtado, Rivera-Campo és Wood sejtését, miszerint az egyenes szakaszokkal, mint élekkel lerajzolt teljes gráf $K(n)$ felbomlik cn síkgráfra, abban a speciális esetben, ha a csúcsok sűrű pontthalmazt alkotnak.

Tanulmányozták, hogy hány összehasonlítás gráf uniójára, illetve diszjunkt uniójára bontható fel egy perfekt gráf. Belátták, hogy szinte minden perfekt gráfra 2 elég, viszont vannak perfekt gráfok, amelyekre tetszőlegesen sok kell.

Tegyük fel, hogy van két metszés nélküli lerajzolása egy gráfnak, ugyanazokkal a csúcs pozíciókkal. El akarunk jutni az egyikből a másikba metszés nélküli lerajzolásokon keresztül, de mindig csak egy élet változtathatunk. Bebizonyították, hogy ez mindig lehetséges a tóruszon, ha a gráf egy erdő.

Halmazelméleti kutatások

Vizsgálták azokat a tulajdonságokat, amelyek a megszámlálható kompaktság és a pszeudokompaktság között helyezkednek el. Sikertelenül próbáltak konstruálni olyan példákat, amelyek ezeknek a tulajdonságoknak az elválaszthatóságát mutatják különböző esetekben: néhány esetben ZFC-ben bizonyítható módon, más esetekben csak konzisztensen.

Folytatták a scattered terek főszámsorozatainak vizsgálatát két irányban. Lokálisan kompakt szétszórt tereket tanulmányoztak azzal a céllal, hogy azonosítsák a legszélesebb főszámsorozat-osztályt, amely a meglévő módszerekkel bizonyíthatóan LCS-terekhez rendelhető. Lindelöf P -terek szisztematikus vizsgálatát végezték el. Megállapították, hogy LLSP-terek esetén nem várhatóak ZFC-ben olyan eredmények, mint amilyeneket az LCS-terek esetében el lehet érni; ehelyett, még véges Cantor–Bendixson magasságú terek esetén is függetlenségi eredmények adódnak.

Bevezettek két topológiai játékot, amelyek lehetővé tették a terek T_0 -pszeudosúlyához kapcsolódó számosság-száminvariánsok definiálását. Számos reguláris és sigma-kompakt topológiai teret konstruáltak, amelyek nem rendelkeznek megszámlálható szűkséggel, de minden diszkrét részhalmazuk lezárása igen. Ezzel megoldottak egy V. Tkachuk által felvetett problémát.

Megoldottak egy Erdős által felvetett problémát: Létezik-e olyan síkbeli halmaz, amely minden egyenesben 1 hosszúságú? Kiderült, hogy a válasz független a ZFC axiómarendszerétől.

A dendritek generikus homeomorfizmusainak dinamikáját tanulmányozták, különös tekintettel az árnyékolási tulajdonságokra. Korábbi vizsgálataikat folytatva teljes leírást adtak bizonyos homogén struktúrákon értelmezett automorfizmus-invariáns mértékekről.

Egy megszámlálhatóan kategorikus, megszámlálhatóan stabil struktúra automorfizmuscsoportján értelmezett természetes topológia teljes mértékben rekonstruálható az automorfizmuscsoport tisztán algebrai tulajdonságaiból. Ezt az eredményt általánosították megszámlálhatóan kategorikus, stabil struktúrákra.

A Mesterséges Intelligencia Osztály egy közös kutatást javasolt annak vizsgálatára, hogy automatizált (számítógépes) módszerekkel hogyan lehet „majdnem azonos jelentésű” formulákat keresni. Megközelítésük az alábbi alapelvre épül: két formula akkor tekinthető majdnem azonos jelentésűnek, ha jelentéseik szimmetrikus különbsége „kicsi” valamely fent említett automorfizmus-invariáns mérték szerint. Kedvező esetben az automorfizmus-invariáns mértékekkel kapcsolatos eredményeik a mesterséges intelligencia fejlesztéseinek alapjául is szolgálhatnak.

Erdős Központ

Tematikus szemeszterek, Workshop-ok és Nyári Iskolák szervezése különböző időszaki matematikai témákban

Az Erdős Központ keretei között a pályázaton kiválasztott kutatócsoportok három tematikus szemesztert szerveztek 2024-ben, megvalósítva a megígért mérföldköveket.

1) Fourier Analysis and Additive problems (2024 tavasz)

Szervezők: Ruzsa Imre (Rényi Intézet), Oriol Serra (Barcelona Tech), Kiss Gergely (Rényi Intézet), Matolcsi Máté (Rényi Intézet), Somlai Gábor (Rényi Intézet/ELTE)

A szemeszter keretein belül két Workshop és egy Nyári Iskola került megszervezésre.

2) Measurable Combinatorics (2024 tavasz)

Szervezők: Jan Grebik (Warwick), Alexander Kechris (Caltech), Oleg Pikhurko (Warwick), Stevo Todorćević (Toronto), Vidnyánszky Zoltán (ELTE)

A szemeszter keretein belül egy Workshop és egy Nyári Iskola – mely a „Young Set Theory Workshop” évenként különböző országokban megrendezett rendezvénysorozat része –, került megszervezésre.

3) Fractals and Hyperbolic Dynamical Systems (2024 ősz)

Szervezők: Szász Domokos (BME), Bálint Péter (Rényi Intézet/BME), Simon Károly (Rényi Intézet/BME), Bárány Balázs (BME), Tóth Imre Péter (Rényi Intézet/BME)

A szemeszter keretein belül két Workshop és két Nyári Iskola került megszervezésre.

2024 folyamán az Erdős Központ pályázott a 2025-beli és későbbi Nyári Iskolák szervezési költségeire és posztdoktori ösztöndíjakra az USA-beli Simons Foundations-höz.

2024. ÉVI KIEMELT PUBLIKÁCIÓK

- Stipsicz AI, Szabó Z: On the minimal genus problem in four-manifolds, In: Feehan PMN, Ng LL, Ozsvath PS (szerk.) Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society (2024) pp. 215-232. 18 p.
<https://real.mtak.hu/218614/>
- Harangi V, Niu X, Bai B: Conditional graph entropy as an alternating minimization problem, IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY 70:2 pp. 904-919. 16 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/175330/> (nem hozzáférhető verzió)
- Kunszenti-Kovács D, Lovász L, Szegedy B: Subgraph densities in Markov spaces, ADVANCES IN MATHEMATICS 437 Paper: 109414, 74 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191162/>
- Manolescu C, Marengon M, Piccirillo L: Relative genus bounds in indefinite four-manifolds, MATHEMATISCHE ANNALEN 390:1 pp. 1481-1506. 26 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191899/>
- Frączyk M, Harcos G, Maga P, Milićević D: The density hypothesis for horizontal families of lattices, AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS 146:1 pp. 107-160. 54 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191437/>
- Böröczky KJ, Radchenko D, Ramos Joao PG: A quantitative stability result for the sphere packing problem in dimensions 8 and 24, JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK 2024:808 pp. 241-270. 30 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191900/>
- Ambrus G, Gárgyán B: Non-diagonal critical central sections of the cube, ADVANCES IN MATHEMATICS 441 Paper: 109524, 26 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191901/>
- Pósfai M, Szegedy B, Bačić I, Blagojević L, Abért M, Kertész J, Lovász L, Barabási AL: Impact of physicality on network structure, NATURE PHYSICS 20:1 pp. 142-149. 8 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191037/>
- Csiszárík A, Kiss MF, Kőrösi-Szabó P, Muntag M, Papp G, Varga D: Mode combinability: Exploring convex combinations of permutation aligned models, NEURAL NETWORKS 173 Paper: 106204 (2024)
<https://real.mtak.hu/191169/>
- Böröczky KJ, Figalli A, Ramos João PG: A quantitative stability result for the Prékopa–Leindler inequality for arbitrary measurable functions, ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ-ANALYSE NON LINEAIRE 41:3 pp. 565-614. 50 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/191940/>
- Erdélyi M, Sawin W, Tóth Á: The purity locus of matrix Kloosterman sums, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY 377:6 pp. 4117-4132. 16 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218615/>
- Csonka B, Simonyi G: Shannon capacity, Lovász theta number and the Mycielski construction, IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY 70:11 pp. 7632-7646. 15 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/196180/>
- Manna A, Koltai J, Karsai M: Importance of social inequalities to contact patterns, vaccine uptake, and epidemic dynamics, NATURE COMMUNICATIONS 15:1 Paper: 4137 (2024)
<https://real.mtak.hu/218616/>

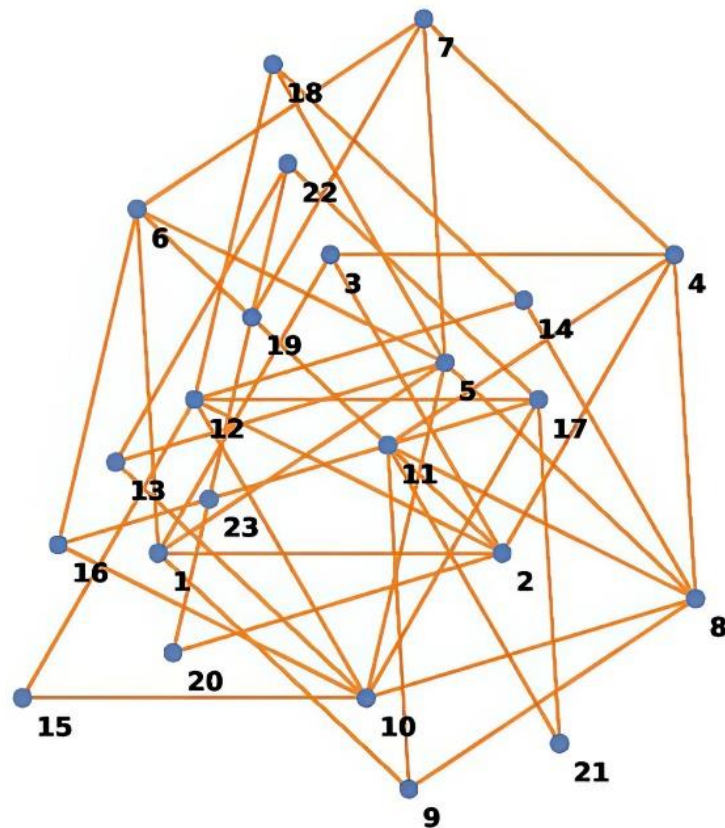
- Bárány I: A matrix version of the Steinitz lemma, JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK 2024:809 pp. 261-267. 7 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/212570/>
- Balka R, Keleti T: Lipschitz images and dimensions, ADVANCES IN MATHEMATICS 446 Paper: 109669, 23 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/204367/>
- Pete G, Timár Á, Stefánsson SÖ, Bonamassa I, Pósfai M: Physical networks as network-of-networks, NATURE COMMUNICATIONS 15:1 Paper: 4882, 8 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218617/>
- Zombori Z, Rissaki A, Szabó K, Gatterbauer W, Benedikt M: Towards Unbiased Exploration in Partial Label Learning, JOURNAL OF MACHINE LEARNING RESEARCH 25: Published 12/24 pp. 1-56. 56 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/215453/>
- Iacopini I, Karsai M, Barrat A: The temporal dynamics of group interactions in higher-order social networks, NATURE COMMUNICATIONS 15:1 Paper: 7391, 11 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218618/>
- Lovász L: The matroid of a graphing, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY SERIES B 169 pp. 542-560. 19 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218619/>
- Chatzakos D, Harcos G, Kaneko I: The Prime Geodesic Theorem in Arithmetic Progressions, INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARCH NOTICES 2024:20 pp. 13180-13190. 11 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218620/>
- Duke W, Imamoğlu Ö, Tóth Á: On a method of Hurwitz and its applications, ADVANCES IN MATHEMATICS 458 Paper: 109968 (2024)
<https://real.mtak.hu/218621/>
- Stipsicz AI, Szabó Z: Definite four-manifolds with exotic smooth structures, JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK 2024:817 pp. 267-290. 24 p. (2024)
<https://real.mtak.hu/218622/>

KIEMELKEDŐ EREDMÉNYEK 2024-BEN

Egységtávolságot elkerülő ponthalmazok a síkon

A sík mekkora hányada színezhető ki úgy, hogy két kiszínezett pont nem lehet pontosan egységnyi távolságra egymástól. Erdős Pál sejtése szerint ez a hányad nem érheti el az egynegyedet. Számos kutatócsoport publikált már részeredményeket, amelyek a kezdeti 0,2857-es becslést fokozatosan 0,2544-ig élesítették. Intézetük kutatóinak eredménye szerint a kérdéses sűrűség nem több a 0,247-nél, ezzel igazolva Erdős sejtését. Eredményüket a *Mathematical Programming* folyóirat tette közzé, melyről a tudományos ismeretterjesztés etalonjának számító *Quanta Magazine* is beszámolt.

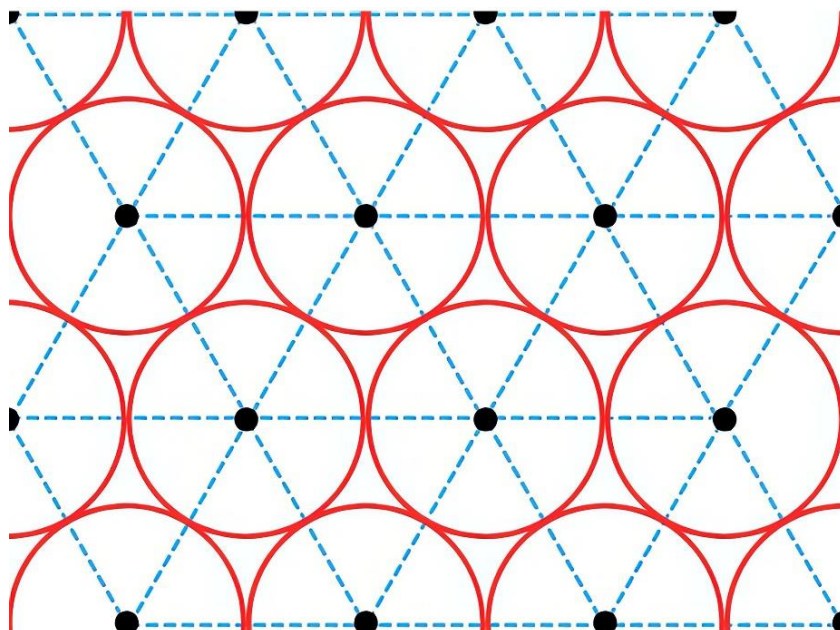
Az áttörést az hozta, hogy ötvözve az analízis, geometria, kombinatorika technikáit a kutatók kidolgozták a korábbi módszerek egy közös általánosítását. Ennek segítségével egy speciális tulajdonságokkal rendelkező ponthalmaz keresési feladatává redukálták a problémát. Az elvárt tulajdonságok túl összetettek ahhoz, hogy papír és ceruza segítségével reális legyen a megfelelő ponthalmaz megtalálása, de mesterséges intelligencia alkalmazásával találtak egy 23 pontból álló alakzatot (1. ábra).



1. ábra: A 23-szögpontú gráf

Legsűrűbb gömbpakolások

Az egyforma gömbök rácsszerű, a kristályok szerkezetére emlékeztető elhelyezéseinek vizsgálata a 18. század vége óta központi kérdésköre a matematikának, amely a számelmélet, a harmonikus analízis és a diszkrét geometria határterülete. A nem rácsszerű elhelyezések intenzív vizsgálata Fejes Tóth László, intézetük korábbi igazgatójának munkásságából nőtt ki. Ő látta be többek között, hogy a síkban az ún. „hatszögrács szerinti elhelyezés” az optimális (2. ábra). A matematika egyik legnagyobb díját ezen eredményéért megkapó, Fields-érmes Maryna Viazovska bizonyította be, hogy 8- és 24-dimenzióban az egyforma gömbök elhelyezései között bizonyos rácsszerűek sűrűsége optimális. A HUN-REN kutatói megmutatták, hogy ha egyforma 8- vagy 24-dimenziós gömbök egy elhelyezésének a sűrűsége közel optimális, akkor az elhelyezés szerkezete az optimális rácsra emlékeztet. A kutatás eredményeit a 200 éves *Crelle* folyóiratban publikálták.



2. ábra: Hatszögrács szerinti elhelyezés