

A HUN-REN RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET KUTATÁSI EREDMÉNYEI 2023-BAN

Algebrai irányú kutatások

Növekedés csoportokban kutatócsoport. Sikerült belátni klasszikus egyszerű csoportokra a Pyber-Szabó és Breuillard-Green-Tao által bizonyított Szorzattétel egy ferde általánosítását, ahol a kiinduló A részhalmazt konjugálni is lehet, nem csak hatványozni. Ez megnyitja az utat egy olyan nem korlátos dimenzióban érvényes állítás felé, aminek a korlátos dimenzióban érvényes Szorzattétel speciális esete (például viszonylag nagy $|A|$ halmazokra ez a pontosabb állítás könnyen adódik). A Ferde Szorzattételt használva belátták a Liebeck–Nikolov–Shalev-sejtés egy közelítő változatát klasszikus csoportokra. Itt a cél a csoportot az A minimális számú konjugáltjának szorzataként előállítani. A Helfgott–Lindenstrauss-sejtésnek befejezték a korábban tervezett élesítését.

Algebra osztály, gyűrűk és modulusok. Munkájukban hangsúlyos szerepet kapott a gyűrűelmélet, reprezentációelmélet és az algebrai geometria határterületén mozgó invariánselmélet, mely a matematika különböző ágaiban rendre megjelenő osztályozási problémák tárgyalásához nyújt eszközöket. A diédercsoport vektorinvariánsai algebrájának generátorai közt fennálló relációk ideáljáról kimutatták, hogy azt generálják a legfeljebb három vektor változótól függő relációk polarizáltjai. Ez a tény lehetőséget adott a kis elemszámú (legfeljebb hatodfokú) diédercsoportok esetén a relációk ideálja minimális generátorrendszerének (esetenként számítógépes segédlettel történő) meghatározására. A kapott eredmény elvezetett egy tetszőleges diédercsoportra érvényes sejtés megfogalmazásához. Véges testek feletti elemi szimmetrikus polinomok egy kis részhalmazáról bizonyították, hogy szeparáló rendszert alkotnak a szimmetrikus polinomok algebrájában (esetenként minimális szeparáló rendszert), és az eredményt alkalmazták a multiszimmetrikus polinomok algebrájára. A reprezentációelmélet egy alapvető kérdése, hogy egy adott csoportnak van-e hűséges irreducibilis reprezentációja. Megmutatták, hogy véges csoportok esetén erre egy Palcoux által korábban adott elegánsan megfogalmazható, a részcsoporthálóra vonatkozó elégséges feltétel szükséges is.

Csoportok és gráfok kutatócsoport. Folytatták a maximális entrópiájú véletlen séták és az adjacencia operátor fő sajátvektora kapcsolatának vizsgálatát unimoduláris véletlen gráfokra, nem konstans görbületű Riemann-sokaságokra és Poisson-pontfolyamatokra. Belátták az Anderson-lokalizációt csúcstranzitív végtelen gráfok paraméteres egyrangú perturbációira. Vizsgálták fizikai hálózatok aszimptotikus viselkedését, végtelen, pozitív sűrűségű csőmodellekre és a fizikai Erdős–Rényi-modellre. Ebből egy Nature Physics publikáció született. Vizsgálták unimoduláris véletlen fák növekedésének létezését. Bebizonyították az ún. ULA sejtést annak eredeti formájában, és bebizonyították, hogy minden korlátos fokú gráf, ami Property A és egyenletes módon amenábilis, erős értelemben is majdnem véges. Kiterjesztették a kvantum-információelméletben alapvető jelentőségű Holevo-egyenlőtlenséget az ún. általános valószínűségi modellre (GPT). Abban az esetben, amikor a modell állapottere egy (tetszőleges dimenziós) gömb, megmutatták, hogy az általánosított Holevo-mennyiség a kvantum esettel analóg módon, egy entrópia-szerű függvény konkávitásának mérőszámaként áll elő. Dolgoztak unimoduláris Galton–Watson-fák Ramanujan-tulajdonságán és matroidok limesz-elméletén. További céljuk szorzattételeket belátni az alternáló csoportokra, illetve a Ferde Szorzattétel helyett különböző A és B halmazok szorzatára erős alsó becslést adni. Ez a fentiek szerint igaz, ha az egyik halmaz konjugáltosztály, továbbá akkor is, ha A és B hasonló méretűek (és nem nagyon nagyok). Folytatják véges csoportok szeparáló invariánsai pontos fokszámkorlátjainak meghatározását, kiegészítve a tavaly Abel-csoportok bizonyos sorozatairól elért eredményeket.

Alkalmazott matematikai kutatások

Magasabb rendű Fourier-analízis. A magasabb rendű Fourier-analízis (röviden HOF) területén sikerült befejezniük a témában fontos szerepet betöltő kompakt nilspace-ek, úgynevezett „double-coset space”-ek segítségével történő klasszifikációját. Ezáltal egy olyan programot vittek sikerre, amely már közel egy évtizede foglalkoztatta a szakértőket. Az eredményeik segítségével új, csoportelméleti inverz tételeket bizonyítottak a Gowers-normákra tetszőleges kompakt csoportokon. Az eredményeiket összefoglaló 81 oldalas cikk benyújtásra került. Sikerült megoldaniuk Jamneshan, Shalom és Tao egy kérdését, amely prím exponensű Abel-csoportok k -ad rendű dinamikus rendszereit írja le Abramov-rendszerek faktoraiként. Az idevonatkozó cikket elfogadták a Journal d'Analyse folyóiratban. Vizsgálták a HOF véges torziójú Abel-csoportokra vonatkozó verzióját. Folytatták a magasabb rendű Fourier-analízis alkalmazott irányaihoz kötődő kutatásokat és az ide vonatkozó algoritmusainak fejlesztését és elemzését. A korábbi kódbázisukat további Python nyelven írt függvényekkel egészítették ki. Ezeknek a kódoknak a publikálását az ide vonatkozó cikk befejezésével egy időben tervezik. Megkezdték a mesterséges intelligenciára (ezen belül a transzformerekre alapuló) idősor-elemzést összekötni a kvadratis Fourier-analízissel. Egy új kézirat készül, melynek befejezésére a 2024-es évben kerül sor.

Mesterséges intelligencia. A mély neuronhálók belső reprezentációinak univerzalitását vizsgáló „Mode Combinability: Exploring Convex Combinations of Permutation Aligned Models” című cikküket közölte a D1 besorolású Neural Networks folyóirat. A Rényi Intézet „Automatizált Matematikus” kutatási irányának legutóbbi projektjében azt vizsgálták, hogyan lehet gépi tanulás segítségével olyan lemmákat generálni, melyek segítenek egy konkrét matematikai célfeladat megoldásához. Elfogadták a „Training BERT Models to Carry Over a Coding System Developed on One Corpus to Another” című cikküket az LREC-COLING 2024 konferenciára. „The Density of Planar Sets Avoiding Unit Distances” című cikküket közölte a D1 besorolású Mathematical Programming folyóirat. Befejezték egy cikket, melyben azt vizsgálták, hogyan lehet több memória felhasználásával gyorsabb konvergenciát elérni a tréning során. Hamarosan elkészülő cikkükben a neurális tangens kernel (NTK) mátrix koncentrációját elemezik. Kvantitatív korlátokat adnak arra, milyen gyorsan konvergál a végtelenül széles limeszhez inicializációkor. Fejlesztettek az OCR (Optical Character Recognition) előfeldolgozó képjavító algoritmuson. Így már a nyílt forráskódú tesseract is elfogadható eredményeket nyújt rossz minőségű gépiróval készült dokumentumokon, ami enélkül nagyon gyengén teljesített. Elkészült a Named Entity Recognition első használható verziója, integrálásra került az ÁBTL rendszerébe. Megkezdték egy RAG (Retrieval Augmented Generation) rendszer kiépítését egyelőre teszt jelleggel publikus adatokon. A projekt célja az ÁBTL-ben fellelhető dokumentumok gyors és intelligens kereshetőségének támogatása.

Kombinatorika és alkalmazásai. Az egyik fontos téma a nagy hálózatok (gráfok) globális szerkezetének folytonos objektumokkal való közelítése. Kutatóik kiterjesztették a limesz-elmélet alapvető fogalmát, a részgráfsűrűséget, közepesen ritka gráfok Markov kernel limeszeire. Ezeknek a függvényeknek az elmélete a diszkrét és folytonos világban egymástól függetlenül fejlődött. Vezető kutatójuk egy több mint 100 oldalas terület-indító kéziratot tett közzé. Nagy gráfok fokszámsorozatának vizsgálata: a „degree preserving növekedési” gráf model segítségével fokszámsorozatok grafikusságáról dolgoztak ki tételeket kutatóik. Kollégáik pontos korlátot adtak részbenrendezett gráfok (posetek) könnyű tesztelhetőségére, azaz, hogy a bemeneti poset méretétől függetlenül egyoldali hibával milyen polinomiális időn belül tesztelhető.

Analitikus és aritmetikus módszerek

Az **Analízis osztály** a Fuglede-sejtéssel kapcsolatban spektrális és parkettázó halmazok tulajdonságait írta le véges csoportokban és az euklideszi térben. A kutatások jelentőségét mutatja, hogy a konvex halmazokra vonatkozó korábbi válaszukért Matolcsi Máté és társszerzője 2023-ban Frontiers of Science díjat kapott. A szintén a harmonikus analízishez tartozó Delsarte-féle extrémális probléma egy új alkalmazását adták az egységtávolságot elkerülő halmazok sűrűségére, megoldva Erdős Pál egy több évtizedes sejtését. Az eredményről a Quanta ismeretterjesztő magazin is beszámolt.

Kvantuminformációelmélet és optimális transzport témakörökben, teljesítve az egyik kitűzött mérföldkövet, leírták a kvantum Wasserstein-távolság és egy optimalizációs probléma pontos kapcsolatát, valamint jellemezték bizonyos kvantum és klasszikus Wasserstein-izometriákat.

Approximációelméletben Bernstein-típusú egyenlőtlenségeket igazoltak csillag alakú tartományokra, valamint többváltozós polinomok egy osztályát karakterizálták.

A következő évre mindhárom fenti témakörben tervez kutatásokat az osztály. Fontos személyi változás, hogy Matolcsi Máté immár teljes állású munkatárs, az osztály új vezetője.

A **Számelmélet osztály** a 100 éves Csebotarjev sűrűségi tételt finomította, a hibatag becslésével. Ez annak a Dirichlet-tételnek az általánosítása tetszőleges algebrai számtestre és annak Galois-bővítésére, hogy a prímek sűrűsége mindegyik $(\text{mod } n)$ maradékosztályban ugyanaz. A 280 éves Goldbach-sejtéssel kapcsolatban sikerült a megoldásszámok főíveken vett adalékára egy olyan közelítő formulát adniuk, amely pl. a sejtést esetlegesen megsértő kivételek számára ad felső becslést. Descartes azon sejtéséről, hogy minden páros szám felírható legfeljebb 3 prím összegeként, igazolták, hogy ez minden X -ig legfeljebb $X^{3/5+o(1)}$ kivétellel fennáll.

Az Automorf Formák kutatócsoport az invertálható mátrixok csoportjának horociklus folyamához kapcsolódó exponenciális összegekről megválaszolta a legfontosabb kérdéseket. A $\text{PGL}(n, \mathbb{Z}[i])$ csoporton értelmezett Hecke–Maass-formák szupnormájára adtak felső becslést, ígéretes új módszerrel. A Selberg-nyomformula egy általánosításában, az $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ csoport hatványainak diszkrét részcsoportha bizonyítottak egy mérföldkő részeredményt, egyelőre csak a geometriai nyommal foglalkozva. Terveik között szerepel a prímhézagoknak és a prímszámtétel különböző általánosításainak vizsgálata, pl. a fenti Dirichlet sűrűségi tétel nem-teljesülése prímgeodetikusokra. Az osztály új főállású munkatársa Tóth Árpád.

A **Valószínűségszámítás osztály** folytatta kutatásait a Markov-láncok, a pénzügyi matematika, a kvantumszámítási és gépi tanulási algoritmusok területén. Gyors konvergenciát bizonyítottak egy P -stabil fokszámsorozatokhoz kapcsolódó Markov-láncre, illetve majdnem-felcserélhető eloszlások Gibbs-mintavételezésére. Véletlen közegbeli Markov-láncok konvergenciáját igazolták nem-kompakt állapottereken. Többváltozós kriptográfiai eljárások elleni kvantumos támadás hatásait elemezték. Funkcionális centrális határeloszlás-tételt igazoltak a gépi tanulásban fontos Langevin-algoritmusra, teljesítve egy korábban vállalt mérföldkövet. A Langevin-algoritmus szuperlineáris deriváltakra működő változatát dolgozták ki és elemezték.

A Zaj-érzékenység csoport vizsgált különböző perkolációs modelleket, illetve gráfok metrikus dimenzióját, ami egy járványterjedésben és telekommunikációban is felmerülő problémakör. Karakterizálták az unimoduláris véletlen síkgráfok izometria-invariáns beágyazásait. A „véletlen kötélhúzás” mérföldkőről elkészítettek egy 70 oldalas cikket (elbírálás alatt), mely a közgazdaságtani játékelmélet egy sokat vizsgált problémájában jelent komoly előrelépést.

Az osztályhoz csatlakozott három posztdok (UC Berkeley, UW Seattle, Marseille PhD-kkel). A 2024-es tervek között pénzügyi folyamatok újszerű elemzése, klasszikus és kvantum Markov-láncok vizsgálata, véletlen gráfok, járványterjedési modellek szerepelnek.

Diszkrét matematikai problémák

A diszkrét matematika fontossága a számítógépek és a kommunikáció korában nem szorul további magyarázatra. Ez a hazai matematikai kutatások egyik nemzetközileg is legelismertebb ága: Szemerédi Endre 2012-ben, Lovász László pedig 2021-ben kapott Abel-díjat, ami a Nobel-díj matematikus megfelelője. Az intézet diszkrét matematikai kutatásait 2023-ban is alapvetően az Extremális kombinatorika és a Gráfelmélet osztály munkája, illetve azok együttműködése az egyetemekkel határozta meg. Ezekhez kapcsolódik a Szakmódszertan osztály, akik együttműködése az egyetemekkel még természetesebb.

A síkgráfok extremális problémái az utóbbi másfél évtizedben kerültek a kutatások középpontjába, nem kis részben az intézet kutatói által írt cikkek eredményeképpen. Kiemelkedő kombinatorika újságban jelenik meg Győri et al. cikke, ami adott páros kör maximális számát határozza meg síkgráfokban. A műhely elismertségét (ezen cikk esetében is) mutatja, hogy a témában történő kutatásokban való részvételre számos (az utóbbi két évben 5) kínai matematikus érkezett féléves, egyéves kínai ösztöndíjjal, de féléves látogatásra az USA-ból is jöttek.

Ugyanebben a folyóiratban jelent meg a geometriai eredetű gráfok (törött vonalak diszjunksági gráfja) kromatikus számát vizsgáló remek cikk (Pach, Tardos és Tóth munkája). Számos további nagyszerű cikk is született a Tardos Gábor vezette *Effective Random Methods in Discrete Mathematics* ERC pályázatának támogatásával rendezett gráfok extremális problémáiról. Természetesen folytatódott a „klasszikus” általánosított extremális problémák vizsgálata is, pl. egyes felfűjt gráfok esetében sikerült meghatározni az általánosított Turán-számot (Győri et al.). Egyre fontosabb téma gráfok entrópiája, illetve, hogy ez hogyan általánosítható grafonokra, amiben szintén áttörő eredményt értek el Harangi, Niu és Bai cikkében.

Nemzetközi együttműködés keretében jelentős előrelépés történt egy elég széles hipergráf osztály Turán-számának a meghatározásában (Füredi et al.), ami a témakör egyik vezető újságjában jelent meg. Egy másik nemzetközi együttműködéssel született kiemelkedő eredmény a részstruktúrák száma témakörben jelent meg az egyik legjobb európai kombinatorikai folyóiratban (Chen et al.). Hosszabb kutatás eredményeként nagy előrehaladást sikerült elérni és új feladatokat kitűzni a keresztbe metsző rendszerek elméletében Füredi, Gyárfás és Király eredményeként.

A Szakmódszertan osztály 2023-as tevékenységét két nagy projekt határozta meg. Az egyik az MTA Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programjában való munka volt az MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport részvételével. A másik a CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) szervezése és lebonyolítása volt, amely a legjelentősebb európai konferencia matematikadidaktika témakörben. Az MTA-Rényi-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport kutatásainak középpontjában a problémásorozatok vizsgálata, a kombinatorika és a valószínűségszámítás oktatása, illetve a felfedezettő matematikatanítás áll. A problémásorozatok vizsgálatát célzó kutatások eredményeként jelent meg egy Q1-es publikáció az osztály két tagja tollából. A felfedezettő matematikaoktatást vizsgáló kutatások eredményeként pedig egy könyvfejezet jelent meg a felfedezettő matematikaoktatás kérdésfeltevési szokásairól. A CERME13 konferencia Budapesten került megrendezésre júliusban, amelyen mintegy 1000 matematikatanítási szakember vett részt, az esemény házigazdája a Rényi Intézet és az ELTE volt. A konferencia előkészítése és lebonyolítása komoly feladat, igazi mérföldkő volt a fiatal Szakmódszertan osztály számára.

Topológiai és geometriai kutatások

Algebrai geometria és alacsony dimenziós topológia. A minimális génusz-függvényre láttak be érdekes jelenségeket és fogalmaztak meg sejtéseket. Bizonyították, hogy azok a sokaságok, melyek fundamentális csoportja kételemű és definit metszetformával rendelkeznek, kettő kivételével végtelen sok differenciálható struktúrát hordoznak. Megtalálták a valós projektív sík 5-szörös összefüggő összegének egy egzotikus beágyazását a sztenderd 4-dimenziós gömbbe. Egy másik kutatócsoport befejezte a görbék rácspontkohomológiájának és ennek a filtrált változatának megszerkesztését. Sőt, a felületsingularitásokhoz rendelt topologikus rácsponthomológia filtrált változata is elkészült. Továbbá osztályozták a racionális és minimális elliptikus felületsingularitások feletti reflexív modulusokat. Vizsgálták a Hitchin-egyenletek magasabb rangú megoldásainak aszimptotikus viselkedését a nagy-energiájú határértékben. Általánosították Mazzeo és szerzőtársai 2 rangbeli eredményét. Irányított Grassman-sokaságok egész együttthatos kohomológia gyűrűire adtak leírást. Meglepetésként, találtak végtelen családokat, amelyek 4-torziót tartalmaznak. Ilyenek létezése eddig nem volt ismert. Torzítatlan bázisok (mutually unbiased bases, MUB) maximális számát vizsgálták 6-dimenzióban számítógépes keresési módszerekkel. Belátták, hogy egy irreducibilis síkgörbe singularitás multiplicitását le lehet olvasni a rácspont kohomológiából. Azt is bebizonyították, hogy a síkgörbék rácspont kohomológia modulusa a pozitív fokszámokban triviális.

Halmazelmélet, logika és topológia. Analizálták, hogy mi a számosságok sorozatainak az a lehető legbővebb osztálya, amiről az ismert módszerekkel belátható, hogy LCS terek számosság-sorozatai. További eredményeket értek el Lindelöf P -terek számosságsorozataival kapcsolatban is. Folytatták a topologikus terek dupla sűrűségi spektrumainak vizsgálatát. Legfontosabb eredményük szerint egy X poliadikus kompaktum esetében ez mindig a $[d(X), w(X)]$ intervallum. Elemezték azt az alapvető kérdést, hogy milyen értékeket vehetnek fel különböző számosságfüggvények bizonyos terek folytonos képein. Vizsgálták továbbá a megszámlálható kompaktság és a pszeudokompaktság közötti tulajdonságokat. Pontrjagin-dualitás segítségével igazolták, hogy a generikus megszámlálható torziómentes Abel-csoport épp a racionális számok additív csoportja. Folytatták kutatásaikat a kis halmazok, nevezetesen a Haar-null és Haar-első kategóriájú halmazok elméletében. Kiszámolták az általánosított Haar-első kategóriájú halmazok három alapvető számosság-invariánsát (a negyedik értéke még ismeretlen). Alkalmazásként megmutatták, hogy független a ZFC axiómarendszeről, hogy ezek a kis halmaz-fogalmak izomorfak-e. Lényegében befejezték az univerzálisan Baire-halmazok elméletének szisztematikus kiépítését. Megvizsgálták, hogy fogalmi ekvivalencia erejéig a newtoni téridő-geometria hogyan kapható meg egy adott fogalom (pl. abszolút nyugalom) hozzáadásával más geometriákból.

Geometria. Erdős és Hajnal eredményét általánosítva belátták, hogy minden l_p normában a síkon ($1 < p$), és minden végtelen M halmazra létezik olyan két-színezése a síknak, amelyben nincs M -mel izometrikus egyszínű halmaz. A robotikában és molekuláris modellezésben alapvető fontosságúak gömbrendszerek és más konvex halmazok rendszereinek topológiai és kombinatorikus tulajdonságai. Régi sejtés, hogy bármely 3-dimenziós centrálszimmetrikus halmaz eltoltjainak uniója legfeljebb négyzetesen sok lyukat határolhat. Egységgömbökre sikerült belátni, hogy a korlát pontos. Sikerült megoldani Dujmovic és Wood egy régi problémáját, miszerint semmilyen n -pontú teljes szakaszokkal lerajzolt gráf nem bontható fel $(n-1)$ -nél kevesebb olyan síkgráfra, amely csillagok diszjunkt uniója. Ez az eredmény éles. A Prékopa–Leindler-egyenlőtlenség a valószínűségszámításban, az analízisben és a konvex geometriában is alapvető. Ennek a stabilitását sikerült megmutatni.

2023. ÉVI KIEMELT PUBLIKÁCIÓK

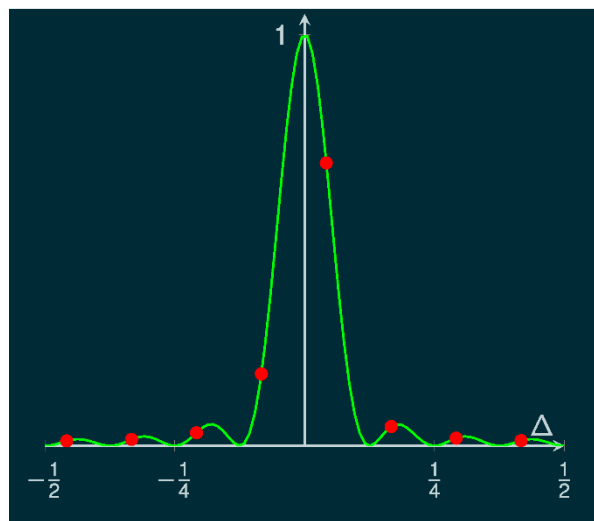
- Bárány I, Frankl P: Cells in the box and a hyperplane, JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY 25:7 pp. 2863-2877. 15 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/162573/>
- Révész SzGy: Oscillation of the Remainder Term in the Prime Number Theorem of Beurling, "Caused by a Given zeta-Zero", INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARCH NOTICES 2023:14 pp. 11752-11790. 39 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191438/>
- Manolescu C, Marengon M, Sarkar S, Willis M: A generalization of Rasmussen's invariant, with applications to surfaces in some four-manifolds, DUKE MATHEMATICAL JOURNAL 172:2 pp. 231-311. 81 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/163239/>
- Abért M, Bergeron N, Biringer I, Gelander T: Convergence of normalized Betti numbers in nonpositive curvature, DUKE MATHEMATICAL JOURNAL 172:4 pp. 633-700. 68 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/163252/>
- Fox J, Pach J, Suk A: Sunflowers in set systems of bounded dimension, COMBINATORICA 43 pp. 187-202. 16 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/163240/>
- Berdysheva EE, Révész SzGy: Delsarte's extremal problem and packing on locally compact Abelian groups, ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA-CLASSE DI SCIENZE 24:2 pp. 1007-1052. 45 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191440/>
- Napoli L, Sekara V, García-Herranz M, Karsai M: Socioeconomic reorganization of communication and mobility networks in response to external shocks, PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNITED STATES OF AMERICA 120:50 Paper: 2305285120, 7 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191155/>
- Ivanov G, Naszódi M: Functional John and Löwner Conditions for Pairs of Log-Concave Functions, INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARCH NOTICES 2023:23 pp. 20613-20669. 57 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191949/>
- Gerbner D: The profile polytope of nontrivial intersecting families, SIAM JOURNAL ON DISCRETE MATHEMATICS 37:4 pp. 2265-2275. 11 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191869/>
- Ambrus G, Bárány I, Frankl P, Varga D: Piercing the chessboard, SIAM JOURNAL ON DISCRETE MATHEMATICS 37:3 pp. 1457-1471. 15 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/134436/>
- Benjamini I, Fraczyk M, Kun G: Expander spanning subgraphs with large girth, ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 251:1 pp. 156-172. 17 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/150425/>
- Domokos M: Separating monomials for diagonalizable actions, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY 55:1 pp. 205-223. 19 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191051/>
- Bencs F, Borbényi M, Csikvári P: Random Cluster Model on Regular Graphs, COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS 399 pp. 203-248. 46 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191052/>
- Juhász I, van Mill J, Soukup L, Szentmiklóssy Z: The double density spectrum of a topological space, ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 255 pp. 383-400. 18 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191921/>
- Cavallo A, Stipsicz AI: Traces of links and simply connected 4-manifolds, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY 55:1 pp. 321-337. 17 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191926/>

- Grósz D, Methuku A, Tompkins C: Ramsey numbers of Boolean lattices, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY 55:2 pp. 914-932. 19 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/162654/>
- Bárány I, Kalai G, Pór A: Universal sequences of lines in $\mathbb{R}^d$, ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 256 pp. 35-60. 26 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/162686/>
- Zhu X, Győri E, He Z, Lv Z, Salia N, Xiao C: Stability version of Dirac's theorem and its applications for generalized Turán problems, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY 55:4 pp. 1857-1873. 17 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/162689/>
- Gong S, Marengon M: Nonorientable link cobordisms and torsion order in Floer homologies, ALGEBRAIC AND GEOMETRIC TOPOLOGY 23 pp. 2627-2672. 46 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/163243/>
- Alon N, Gujgiczer A, Körner J, Milojević A, Simonyi G: Structured Codes of Graphs, SIAM JOURNAL ON DISCRETE MATHEMATICS 37:1 pp. 379-403. 25 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191871/>
- Berkes I, Borda B: Random walks on the circle and Diophantine approximation, JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY 108:2 pp. 409-440. 32 p. (2023)
<https://real.mtak.hu/191456/>

KIEMELKEDŐ EREDMÉNYEK 2023-BAN

Torzítatlan fázisbecslés és továbbfejlesztett kvantumállapot meghatározás

A kvantumalgoritmusokról ismert, hogy mérsékelt gyorsulást tesznek lehetővé számos optimalizálási probléma megoldásában, és a tanulmány egyik eredeti motivációja az volt, hogy javítsa a belsőpont-módszeren alapuló kvantumoptimalizációs algoritmusok futási idejét, amelyek alkalmazhatók különféle lineáris, szemidefinit és konvex problémákra. A további gyorsítást egy alapvető fontosságú kvantumprimitív, a kvantumos fázisbecslés újragondolásával és javításával éri el a tanulmány, ami mellesleg számos más kvantumalgoritmus, többek között Shor kvantumalgoritmus magját is képezi (Shor faktorizációs algoritmus közismerten feltöri a modern kriptográfiának nagy részét). A fázisbecslésben végrehajtott javítás eredményeképpen a becsült értékek eloszlása folytonossá, torzítatlanná és szimmetrikusan elosztottá válik a becsülni kívánt fázis körül (lásd a zöld vonalat az 1. ábrán) – ezzel szemben az eredeti fázisbecslésben az eloszlás diszkrét, nem szimmetrikus és általában torzított (lásd a piros pontokat az 1. ábrán). A tanulmány összességében több javított kvantumalgoritmikus technikát ad fázis, állapot és várható érték becslési feladatokra. Az ilyen feladatok központi szerepet játszanak olyan problémákban, ahol a kvantumalgoritmusok gyorsulást kínálnak, mert a kvantumszámítógépek természetesen és natívan dolgoznak kvantumállapotokkal. Általánosságban ez a munka egy szélesebb kutatási irány része, amely a kvantuminformáció natív feldolgozására törekszik amennyire csak lehetséges kvantum-klasszikus konverziók elkerülésével, ezáltal elkerülve a felesleges többletmunkát a kvantuminformáció-feldolgozásban.



1. ábra: (Ismeretlen) $\pi/12$ fázis becslésének eloszlása hagyományos kvantumos fázisbecsléssel három qubites felbontással (piros pontok), és az új folytonos, torzítatlan és szimmetrikus becslési módszerrel (folytonos zöld vonal).

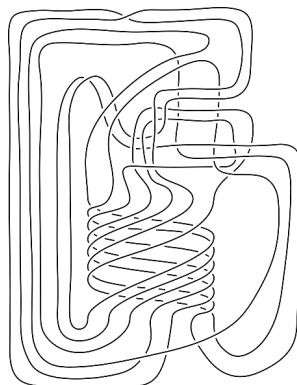
A Rasmussen-invariáns általánosítása és felületekre való alkalmazása bizonyos négy-sokaságokban

Tárgyainknak három alapvetően elkülönülő vagy „független” iránya van, ezeket szélességnek, magasságnak és mélységnek nevezzük. Elsőre természetellenesnek és zavarónak hangzik egy negyedik dimenzió figyelembevétel, Einstein munkája után azonban világossá vált, hogy a „téridő”, amelyben élünk, lényegében egy 4-dimenziós objektum, amelynek alakját nem értjük teljesen. A 4-dimenziós alakzatokkal kapcsolatos sok kérdés még nyitott: például még mindig nem tudni, hogy a legegyszerűbb 4-dimenziós alakzatnak (az úgynevezett 4-dimenziós gömbnek) van-e „egzotikus” testvére, vagyis olyan alakzat, amely nagyon hasonlónak tűnik hozzá, de amelyek a valóságban finoman különböznek egymástól.

Egzotikus 4-gömbök megalkotásának céljából Gluck 1962-ben bevezette a „Gluck-csavar” néven ismert technikát: ez 4-dimenziós alakzatok nagy családját hozta létre, amelyek úgy néznek ki, mint a 4-gömb. Egyes esetekben ismert, hogy Gluck konstrukciója a szokásos 4-gömböt állítja elő, de minden más esetben egyszerűen nem tudjuk, hogy a Gluck-csavar egzotikus 4-gömböt eredményez-e.

2009-ben Freedman, Gompf, Morrison és Walker egy lehetséges módszert javasoltak, amely megkülönböztet egy ilyen példát a standard 4-gömbtől. Módszerük a csomóelméletre épül: bármely potenciálisan egzotikus 4-gömbhöz hozzárendelhető egy, a 2. ábrán bemutatott csomó. Viszont bármilyen csomóhoz hozzá lehet rendelni egy számot, az úgynevezett s invariánst, amely számítógép segítségével kiszámolható. Freedman, Gompf, Morrison és Walker megjegyezte, hogy ha egy ilyen csomó s invariánsa nem nulla, akkor a 4-dimenziós alakzatnak valóban egzotikus 4-gömbnek kell lennie! Ezt a megközelítést a Gluck-féle konstrukció két példáján próbálták ki, de a kapott s invariáns mindig nulla volt.

Manolescu, Marengon, Sarkar és Willis „A Rasmussen-invariáns általánosítása és felületekre való alkalmazása bizonyos négy-sokaságokban” című cikke fundamentális okot talált ennek a megközelítésnek a kudarcára: megmutatták, hogy ha egy potenciálisan egzotikus 4-gömb Gluck módszerével keletkezett, akkor a hozzá tartozó csomó s invariáns mindig nulla lesz. Ez azt jelenti, hogy egy egzotikus 4-gömb észleléséhez vagy nem a Gluck-féle konstrukciót kell használnunk, vagy a Freedman, Gompf, Morrison és Walker által javasolt stratégiától eltérő stratégiát kell használnunk az egzotikusság észlelésére.



2. ábra: Az ábra a Freedman-Gompf-Morrison-Walker egy bonyolult csomóját mutatja. Ha ennek a csomónak az s invariánsa nem nulla, akkor egzotikus 4-gömböt adna. Manolescu, Marengon, Sarkar és Willis cikke azonban koncepcionális okot ad arra, hogy miért nem működhet az s invariánsra alapuló érvelés (sok további esettel együtt).

OUTSTANDING ACHIEVEMENTS IN 2023

Unbiased phase estimation and improved quantum tomography

Quantum algorithms are known to provide modest speedups for a wide range of optimization problems, and one of the original motivations for the paper was to improve the running time of interior-point-method-based quantum optimization algorithms that are applicable to a variety of linear, semidefinite and convex programs. The improvements are obtained by revisiting and improving a fundamental quantum primitive known as quantum phase estimation, which is at the core of many quantum algorithms including Shor's quantum algorithm for factorization, that breaks much of modern cryptography. The devised improvement in phase estimation is to make the estimator continuous, unbiased, and symmetrically distributed around the phase to be estimated (see green line on figure 1) – this is in contrast to vanilla phase estimation where the distribution is discrete, non-symmetric, and typically slightly biased (see red dots on the figure 1). More generally the paper develops several improved quantum algorithmic techniques for phase, state, and expectation value estimation tasks. Such tasks are central in problems where quantum algorithms offer speedups, because quantum computers naturally and natively operate with quantum states. On a high level this work is part of a wider research direction incentivizing the native processing of quantum information by avoiding quantum-classical conversions as much as possible and thereby removing unnecessary overheads in quantum information processing.

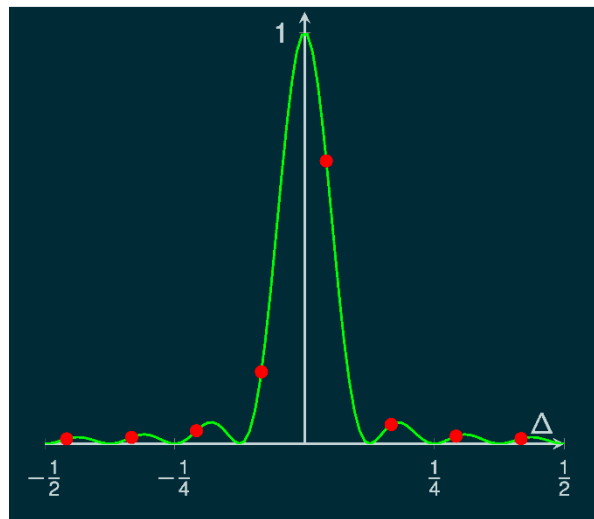


Figure 1: Estimating the (unknown) phase $\pi/12$ using conventional quantum phase estimation with 3 (qu)bits of precision and the resulting discrete distribution (red dots) vs. using the new continuous, unbiased and symmetric estimation method (continuous green line).

A generalization of Rasmussen's invariant, with applications to surfaces in some four-manifolds

The objects we see every day have three fundamentally distinct, or "independent", directions we call them width, height, and depth. At first it sounds unnatural and confusing to consider four dimensions, after Einstein's work it became clear that the "space-time" in which we live is intrinsically a 4-dimensional object, whose shape we do not fully understand. Many questions about 4-dimensional shapes are still far from a complete answer: for example, it is still unknown if the simplest 4-dimensional shape (called the 4-sphere) has any "exotic" siblings, that is shapes that look very similar to it, but which are in reality subtly different.

With the goal of constructing exotic 4-spheres, Gluck introduced in 1962 a technique known as "Gluck twist": this produced a large family of 4-dimensional shapes that look like the 4-sphere. In certain cases, it is known that Gluck's construction produces the standard 4-sphere, but in all other cases we simply don't know if the Gluck twist produces an exotic 4-sphere.

In 2009 researchers Freedman, Gompf, Morrison, and Walker proposed a possible method which could tell one of those examples apart from the standard 4-sphere. Their method is based on knot theory: to any potentially exotic 4-sphere one can associate a knot, like the one in the figure 2. In turn, given any knot, one can associate a number to it, known as its s invariant, which can be found using a computer. Freedman, Gompf, Morrison, and Walker noted that if the s invariant of such a knot is non-zero, then the 4-dimensional shape must be a truly exotic 4-sphere! They tried this approach on two examples of Gluck's construction, but the s invariant they got was always zero, so nothing could be concluded.

In the paper "A generalization of Rasmussen's invariant, with applications to surfaces in some four-manifolds", Manolescu, Marengon, Sarkar, and Willis provide a conceptual reason for the failure of this approach: they show that if a potentially exotic 4-sphere is constructed using Gluck's method, then its associated knot will always have vanishing s invariant. This implies that in order to detect an exotic 4-sphere we must either use a different construction from Gluck's one, or use a strategy different from the one proposed by Freedman, Gompf, Morrison, and Walker to detect exotic spheres.

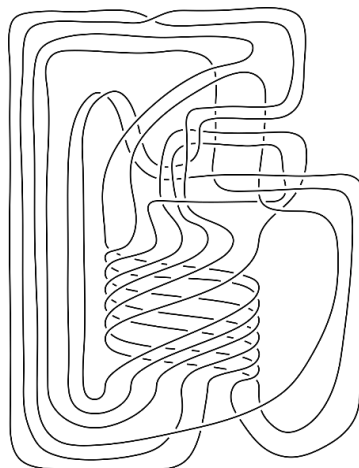


Figure 2: The figure shows a complicated knot from Freedman-Gompf-Morrison-Walker's paper. If its s invariant were non-zero, then it would yield an exotic 4-sphere. However, the paper of Manolescu, Marengon, Sarkar, and Willis gives a conceptual reason why its s invariant (along with that of many other examples) cannot work.